décroissante sur $]1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur l'intervalle $J=f(]1,+\infty[)=]1,2[$

● $x \in]1,2[$, $y \in]1,+\infty[$

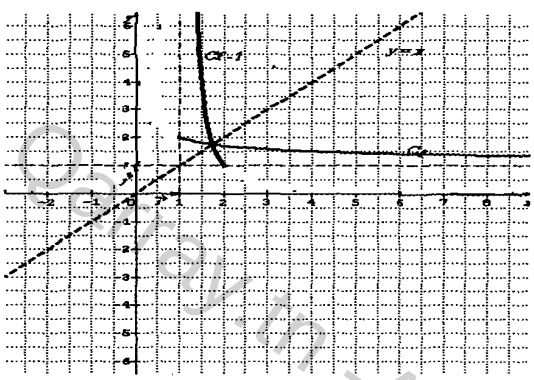
$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$$f(y)=1+\frac{1}{\sqrt{y}}=x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}}=x-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow y=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2$$

Conclusion : $\boxed{f^{-1}(x)=\frac{1}{(x-1)^2}}$; $x \in]1,2[$

●



● Posons $g(x)=f(x)-x$

$\forall x>1$: $g'(x)=f'(x)-1<0$ car $f'(x)<0$

Donc g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et $g(]1,+\infty[)=]-\infty,1[$

Comme $0 \in]-\infty,1[$ alors l'équation $g(x)=0$ (et par la suite l'équation $f(x)=x$) admet une unique solution α dans l'intervalle $]1,+\infty[$

● $\forall x \geq 1$ on a : $2x\sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$

D'où $f'(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}} \geq -\frac{1}{2}$

Ce qui donne : $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$

Finalement : $\forall x \geq 1$ on a $\boxed{|f'(x)| \leq \frac{1}{2}}$

● f est dérivable sur $]1,+\infty[$, $x \in]1,+\infty[$

$\alpha \in]1,+\infty[$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

Donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a : $|f(x)-f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

On a aussi : $f(\alpha)=\alpha$ d'où $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$

Exercice n° 14

$x \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$; $f(x)=2-\sqrt{-2x+1}$

● a) La fonction : $x \mapsto -2x+1$ est dérivable est strictement positive sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

Donc f est dérivable sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ (Rque : f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$)

$$f'(x)=0-\frac{(-2x+1)'}{2\sqrt{-2x+1}}=-\frac{-2}{2\sqrt{-2x+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-2x+1}}>0$$

Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2

b) f est continue et strictement croissante sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ donc f réalise une bijection de $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ sur $J=f\left(\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\right)=]-\infty,2]$

● $y \in \left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$, $x \in]-\infty,2]$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$, cherchons donc y

$$f(y)=2-\sqrt{-2y+1}=x \Leftrightarrow \sqrt{-2y+1}=2-x$$

$$\Leftrightarrow -2y+1=(2-x)^2 \Leftrightarrow y=\frac{1-(2-x)^2}{2}$$

$$=\frac{1-(4-4x+x^2)}{2}$$

Conclusion : $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-x^2+4x-3)$, $x \in]-\infty,2]$

● on a $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(-x^2+4x-3)$, $x \in]-\infty,2]$ donc f^{-1} est dérivable sur $]-\infty;2]$ (fonction polynôme)

Conclusion : f^{-1} est dérivable sur $]-\infty,2]$

● $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'[(f^{-1})(1)]}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{1}=1$

(Rque : On peut aussi calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)=-x+2$)

Copyright © - Aqra Bleid - Qarray.tn